LE MONDE ET LE CALCUL
RÉFLEXIONS SUR CALCULABILITÉ, MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

GIUSEPPE LONGO ET THIERRY PAUL

Résumé. La nature calcule-t-elle ? Et qu'est-ce que le calcul ? Un certain nombre de débats à Cerisy ont évoqué ces questions qui reflètent bien une certaine circulation d'idées pendant ces dix jours en Normandie. Evoquons quelques directions, et les problématiques qu'elles soulèvent.

Table des matières

Pour les actes du colloque de Cerisy, septembre 2006, à paraître.

1. Introduction

Des machines numériques d'une extraordinaire puissance logique et de calcul sont en train de changer le monde. Elles le changent par leur force et originalité mais aussi par l'image qu'elles nous renvoient du monde : elles aident dans mille tâches, elles en permettent de radicalement nouvelles, elles sont un outil indispensable à la recherche scientifique, mais elles projettent aussi leur propre structure mathématique sur les processus dans lesquels elles sont impliquées. Ces machines ne sont pas neutres, en fait elles sont extrêmement originales et riches d'une histoire complexe, basée sur de nombreux tournants de la pensée qui ont permis de les inventer ; elles synthétisent une vision, une science de grande profondeur. Elles sont "alphabétiques", dans le sens profond du codage du langage par des lettres sans signification, une invention qui date de 5.000 ans ; elles sont cartésiennes par leur dualisme logiciel/matériel et par la réduction de la pensée aux pas élémentaires et simples du calcul arithmétique ; elles sont logiques, par leur naissance dans un cadre logico-mathématique, à la Frege et Hilbert, dans les années '30 ("les programmes sont des preuves"). Pour toutes ces raisons, elles contribuent à une lecture de la nature ancrée sur le discret calculable, sur un espace-temps encadré dans la topologie discrète, dont l'accès et la mesure sont exacts, comme dans les bases de données digitales.

Nous verrons pourquoi confondre la physique, pourtant si "mathématisée", avec le calcul, sous quelque forme que ce soit, nous semble erroné. Tout d'abord, l'idée que la physique se "résout à résoudre" des équations est une idée fausse. Il suffit pour s'en convaincre de penser qu'une grande partie de la physique classique concerne des problèmes variationnels, où la recherche d'une géodésique est très différente de la recherche de la solution d'une équation. Sans parler de la situation quantique, singulière. Ni des sciences du vivant, si peu mathématisées et où les notions d'invariant et de transformation qui le préserve, centrales en mathématiques et physique, sont loin d'être "stabilisées".

L'importance nouvelle des machines numériques, en particulier en sciences de la nature, demande alors une analyse fine du rapport entre calcul et processus naturels. Nous nous focaliserons ici sur les rapports entre calculs et, parmi les processus physiques, ceux que l'on considérera comme "naturels", c'est à dire en dehors de l'intervention trop humaine (car une machine aussi produit, voire est, un processus physique, mais elle est le résultat d'une construction humaine d'extraordinaires originalité et richesse théorique). Nous poserons donc la question : est-ce que les processus physiques calculent ?

2. La calculabilité et le continu

La réponse naïve, et malheureusement fort répandue, à cette question est que, oui, tout est information alpha-numérique et son élaboration computationnelle (comme au XVIIième si`cle, quand tout était mécanisme d'horlogerie - et que les iatromécaniciens inventaient l'anatomie moderne, mais faisaient aussi la physiologie des pompes hydrauliques, la médecine des saignées). Cette thèse, sous ses différentes formes, est souvent appelée "thèse de Church physique". Revenons donc brièvement à cette thèse dans dans sa forme originale, purement logico-mathématique et point physique.

La thèse de Church, née dans les années '30 après les preuves d'équivalence fonctionnelle des différents systèmes formels pour la calculabilité (et concernant seulement la calculabilité sur les entiers), est une thèse extrêmement solide : elle nous assure que n'importe quel *système d'écriture finie* sur les entiers (un système logico-formel à la Hilbert) calcule au plus les fonctions récursives classiques (Gödel, Kleene, Church, Turing...). Cette thèse est donc née en logique mathématique : le lambda-calcul (Church, 1932), un système pour le codage fonctionnel des calculs et, au delà, des déductions logiques, et la Logical Computing Machine de Turing[1] ont été les moteurs des différentes preuves d'équivalence[2].

La toute première question à se poser est la suivante. Si l'on élargit le cadre formel, que se passe-t-il ? Bref, si l'on considère comme support de base du calcul un ensemble "plus grand" que les entiers naturels, est-ce que cette invariance des formalismes est préservée ? Bien évidemment, si on veut se rapporter à la physique-mathématique du continu (différentiable), une extension à examiner devrait être : qu'en est-il du traitement computationnel de ces nombres calculables "limites" que sont les réels calculables ? Est-ce que les différents formalismes pour la calculabilité sur les réels sont équivalents ? Un oui, pourrait suggérer une sorte de thèse de Church "étendue" au continu computationnel.

---

[1] 1936 : "A man provided with paper, pencil and rubber, and subject to a strict discipline, is in effect a Universal (Turing) Machine", [21]. En fait, il suffit qu'un lecteur/écrivain sache lire/écrire/effacer 0 et 1 sur un ruban illimité, se déplaçant ensuite d'une case à droite ou à gauche, selon les instructions (écrit/efface/bouge à droite/à gauche) pour calculer toute fonction formellement calculable (voir la prochaine note).

[2] Les autres définitions de calculabilité sont plus "mathématiques" : elles proposent, de différentes façons, des classes de fonctions arithmétiques, qui contiennent la fonction constante 0, la fonction +1, l'identité, et fermées par composition, récursion (bref : $f(x+1) = h(f(x), x)$) et minimalisation (c'est à dire, $f(x) = min_y[g(x, y) = 0]$). Il n'est mathématiquement point évident et fort remarquable, qu'en bougeant à droite et à gauche des 0 et des 1 sur une feuille, on puisse calculer toutes ces fonctions : voilà la génialité de Turing et la naissance de la machine à 0 et 1 qui va changer le monde.

Par cette question, on commence donc à s'approcher de la physique, tout en restant dans un cadre purement mathématique, car les mathématiques sur le continu des nombres réels constituent un très vaste domaine d'applications à la physique, depuis Newton et Leibniz.

Or, de cette équivalence des formalismes, au cœur de la thèse de Church, il ne reste rien pour ce qui est de la calculabilité sur les réels : les modèles proposés, dans leur structure originaire, sont démontrablement différents, pour ce qui concerne l'expressivité calculatoire (les classes de fonctions définies).

On peut grossièrement regrouper de nos jours les différents systèmes formels pour le calcul sur les réels en quatre groupes principaux (mais point exhaustifs) :

- l'*analyse récursive*, qui est une approche des réels calculables de Turing, par une extension infinitaire de la machine de Turing proposée par Weihrauch (deux rubans, dont un peut encoder un réel calculable, un nombre donc infini, l'autre encode le programme voir [25] ; du point de vue mathématique, l'idée originale de Turing a été d'abord développé par Lacombe et Grezgorzcyk, en 1955-57)

- le modèle BSS de Blum, Shub et Smale (un ruban infini et un petit système de contrôle, voir [6])

- les fonctions Réel-récursives à la Moore (définies dans un style plus mathématique : quelques fonctions de base et fermeture par composition, projection, intégration et recherche du zéro, voir [15])

- différentes formes de systèmes "analogiques", dont les neurones à seuil, le GPAC, le General Purpose Analog Computer, dû à Shannon, [20] et préfiguré par une idée de V. Bush (M.I.T., 1931, [4]), a précédé la récursivité classique.

Ce qui est bien intéressant et qui confirme la solidité de la thèse de Church originale, c'est que la restriction aux entiers de tous les modèles connus du continu calculable nous donne à nouveau la récursivité classique. Que pouvons-nous dire de mieux, quant aux inclusions, liens, passages démontrables, quand on passe à ces formalismes pour le continu ?

Bien évidemment il s'agit d'un continu relatif : les réels calculables ne forment pas un continu à la Cantor, ils sont un ensemble de mesure 0, dénombrable. Toutefois, leur topologie "naturelle" n'est pas la topologie discrète. Voilà la différence cruciale avec la calculabilité sur le dénombrable discret.

La différence est cruciale par rapport à la modélisation physique pour les raisons suivantes. En physique, la dimension (cartésienne) de l'espace est une question fondamentale : la relativité et la théorie moderne des cordes, pour prendre des exemples, en font une question constitutive ; mais aussi la propagation de la chaleur ou la théorie du champ moyen, pour rester classique, dépendent de façon essentielle de la dimension considérée, voir [5]. Or, la calculabilité sur les entiers est "indifférente" à la dimension cartésienne : on ne change pas l'expressivité de la machine en changeant les dimensions de ses bases de données, juste l'efficacité polynomiale. Ce fait est dû à l'isomorphisme calculable entre N^2 et N. On peut alors définir, sans difficulté et pour tout formalisme discret, la fonction universelle à l'intérieur de la classe même des fonctions calculables (c'est à dire, une fois énumérées les fonctions calculables, $(f_i)_{i \in N}$, la fonction $U(i, n) = f_i(n)$ y appartient). Ces propriétés, fort intéressantes, sont une conséquence du fait, tout à fait général, que la topologie discrète ne force pas de dimension. Bref, dans l'univers du discret (la catégorie des ensembles), tout ensemble infini (des entiers en particulier) est isomorphe à tous ses produits (cartésiens) finis. Mais quand la topologie discrète n'est plus "naturelle", dans un continu à la Cantor voire calculable, avec la topologie euclidienne par exemple (ou "réelle"), les espaces ayant des différentes dimensions ne sont plus isomorphes. On dit alors que la dimension est un invariant topologique, pour des topologies qui dérivent de l'intervalle de la mesure physique (euclidienne, typiquement). Un lien formidable entre géométrie et physique : la métrique (et la topologie induite) de la sphère (ou intervalle) correspond bien à la mesure physique "naturelle", celle des intervalles, et elle "force" la dimension, une notion cruciale en physique. Voilà donc une différence de fond pour les mathématiques (et la calculabilité) sur le continu : tout codage bijectif d'espaces de différentes dimensions est nécessairement non-continu et pour définir, typiquement, la fonction universelle, on doit changer de dimension, donc sortir de la classe donnée.

Revenons donc à notre question, qui est une façon à notre avis rigoureuse de parler des extensions de la thèse de Church : les différents formalismes pour la calculabilité sur le continu, qui sont adéquats aux systèmes physiques et qui font donc de la dimension cartésienne un enjeu central, même s'ils sont non-équivalents (pas d'extension de la thèse de Church, donc), peuvent-ils être corrélés ? Des réponses partielles sont fournies par maints auteurs : [12, 3] présentent un survol et des résultats récents qui permettent, par l'ajout de fonctions et opérateurs fort pertinents du point de vue physique, d'établir des inclusions sous conditions, des passerelles très informatives. Sur la base de ces travaux, on devrait arriver à une notion de "système standard" pour la calculabilité sur les réels calculables qui représente une extension raisonnable de la thèse de Church au continu calculable (tous les systèmes standards seraient équivalents, modulo l'enjeu fondamental de la dimension), donc à un lien intéressant avec les mathématiques de la physique. Toutefois, cette standardisation, pour une classe suffisamment grande, n'est point évidente. Et il est bien clair que l'on reste, comme pour la thèse de Church logico-formelle, à l'intérieur des formalismes mathématiques[3]. Qu'en est-il des processus physiques ?

3. Calculabilité mathématique et vécu de la physique

Posons-nous une question préliminaire à celle qui consiste à savoir si la nature calcule : qu'est-ce que la nature pourrait bien calculer ? Si l'on regarde l'objet avant la méthode, les choses ne sont peut-être pas aussi simples. Vladimir Arnol'd rappelle dans son livre [2] la formule attribuée à Newton : "Il faut résoudre des équations". Placée sous ce chapeau l'activité physique pourrait bien s'abriter sous une autre formule, de Galilée cette fois[4]. Et sous le point de vue de Galilée, qui est toutefois loin d'être formaliste, mais plutôt "géométrique" et voit toujours la "filosofia" comme intermédiaire entre nous et le monde, la question posée pourrait bien être naturelle.

Toutefois, il faut tout de suite remarquer que l'importance d'une équation, ou plus généralement d'une structure conceptuelle mathématique utilisée en physique, est souvent plus importante in abstracto, que les solutions qu'elles proposent. Mais regardons même en amont de cela.

3.1. **Y a-t-il quelque chose à résoudre, à calculer ?** La description d'un phénomène physique se passe dans un cadre de "modélisation", c'est-à-dire dans un cadre fondamentalement "perturbatif". En effet, l'isolement d'un phénomène, sa compréhension intrinsèque, suppose que l'on néglige son interaction avec le reste du monde. Mais négliger ne veut pas dire annihiler : le reste du monde existe, et crée des perturbations à cet isolement. De ce point de vue un modèle se doit d'être plongé dans un "ouvert" de modèles.

L'isolement d'un concept sur lequel on travaille est, par exemple, le résultat d'un choix d'échelle. Les échelles voisines sont alors supposées être soit inaccessibles (échelles plus petites), soit traitables par moyennisation (échelles plus grandes). Dans les deux cas, elles peuvent influencer le modèle, et

[3] Quant à l'extension de la Thèse de Church aux réseaux d'ordinateurs et aux systèmes concurrents en général, parfaitement discrets mais distribués dans l'espace-temps que l'on comprend mieux par les outils du continu, nous renvoyons à [1] et à son introduction : on y observe que cette thèse, dans ce contexte, n'est pas seulement fausse, mais totalement fourvoyante (les processus ne sont pas des relations input-output et leur "parcours de calcul" - modulo homotopie par exemple - est ce qui intéresse vraiment)

[4] "La filosofia scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico láuniverso) non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, nei quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola ; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto." **Il saggiatore**, 1623.

l'équation qui le synthétise. Se poser la question de savoir si quelque chose que l'on calcule, physiquement, rentre dans un cadre de calculabilité au sens évoqué dans cet article, mérite donc au moins des précautions.

Y-a t'il des équations et seulement des équations ? Une grande partie de la physique classique repose sur des principes variationnels. La trajectoire apparaît non comme solution d'une équation, mais comme solution retenue parce qu'elle optimise, extrémise une quantité (l'action). Bien sûr cela est équivalent à résoudre des équations (Euler-Lagrange), mais ce n'est qu'une équivalence. Souvenons-nous aussi que Feynmann [10] préférait la solution à l'équation pour la mécanique quantique. Dans ce cas plus d'équation, ce sont toutes les trajectoires possibles (minimisant ou non la fonctionnelle d'action) qui devraient intervenir. C'est possible, mais grâce à l'intégrale fonctionnelle, en *dimension infinie*. Quid de la calculabilité dans ce cas ?

Prenons un autre exemple : la théorie quantique des champs, théorie physique non-fondée mathématiquement, mais aux succès phénoménaux ..... de précision et reposant entièrement sur des calculs perturbatifs [17].

On voit bien que, même sans parler de l'imprécision de la mesure classique dont nous allons parler plus bas, la situation est en quelque sorte floue, perturbative, et donc que le problème de la calculabilité en physique est multiple et complexe.

3.2. **Prenons les équations.** Mais supposons donc qu'équation il y a. Et supposons que le véritable enjeu soit vraiment la solution, prédictive. Alors il faut remarquer que rares sont les situations où les valeurs de la solution sont importantes. Un exemple simple : les physiciens aiment tracer des courbes, même lorsque une formule donnant la solution est disponible. Mais alors que reste-t-il de la calculabilité lorsque le "résultat" est lissé, pour lequel seules les grandes "tendances" sont importantes.

Intéressons-nous aux systèmes dynamiques donnés par des applications, celle du boulanger par exemple (voir plus bas). En principe il n'y a pas de mapping en physique, il y a des flots. Une application apparaît lorsque l'on calcule un flot à temps 1 (que l'on va ensuite itérer), mais ce flot à temps 1 est calculé justement à partir d'équations. Les applications de premier retour de Poincaré, et les systèmes dynamiques qui ont suivi, ont précisément été inventés comme outils plus simples, qualitativement et quantitativement plus malléables, mais il ne faut pas leur demander de trop se confondre avec les systèmes initiaux.

3.3. **Conclusion.** Peut-on considérer une équation isolée en physique ? Si les équations arrivent par familles, à l'intérieur desquelles les paramètres bougent, comment faut-il appréhender le problème de la calculabilité, si chèrement définie à l'intérieur d'un espace discret et fini (bien que de cardinal non fixé) ? Peut-être la nature calcule-t-elle, mais la connaissance, la théorie que nous avons de la nature vit fondamentalement dans un espace énorme, infini, qui pourrait bien échapper à toute approche calculabiliste.

4. Déterminisme chaotique et prédictibilité

Depuis Newton et Leibniz, disions-nous, on représente dans le continu spatial, et souvent aussi temporel, les systèmes dynamiques, c'est-à-dire la plupart des modèles mathématiques (en termes logiques : les formalismes mathématiques) pour la physique classique. Ceci n'implique point que le monde soit continu, mais seulement que nous avons dit beaucoup de choses grâce aux outils du continu, si bien précisés par Cantor (mais son continu n'est pas le seul possible : Lawvere et Bell en ont proposé un autre, sans points, mais, malheureusement, pas plus riche mathématiquement pour l'instant - quoique certains espèrent y traiter mieux la géométrie de la physique quantique).

En ce qui concerne les rapports entre ces systèmes et leur capacité de prédire les évolutions physiques, il y a souvent une grande confusion entre mathématique et processus physique. La notion de système déterministe chaotique est purement mathématique et donnée, de façon standard, par trois propriétés formelles (voir [8]). Toutefois, il est légitime de parler d'un processus physique et de dire qu'il est déterministe (et chaotique, si c'est le cas) : on entend par là que l'on peut ou l'on pense pouvoir écrire un système d'équations, voire une fonction d'évolution, qui en détermine l'évolution (dans le temps ou dans le paramètre de contrôle pertinent).

L'imprédictibilité est alors une propriété qui surgit à l'interface entre processus physique et mathématique : on se donne un processus physique et un système mathématique (un systèmes d'équations, voire directement une fonction d'évolution - un système itéré, typiquement donc à temps discret, dans un espace continu) et l'on dit que ce processus par rapport à ce système (voire par rapport à tout système raisonnable que nous considérons comme modélisant le processus donné) est imprédictible. Un processus physique "en soi" n'est pas imprédictible : il faut que quelqu'un essaie de *dire*, voire *prédire*, par l'écriture mathématique typiquement, pour qu'il y ait imprédictibilité. De même, un système mathématique n'est pas imprédictible, en soi : on l'écrit, on lui donne des valeurs, il calcule.

Et c'est là que la calculabilité entre en jeu. Il arrive que tout système mathématique "raisonnable" soit une écriture effective : sauf pathologie (donner des coefficients non-calculables, l'oméga de Chaitin par exemple, à un polynôme !), on écrit normalement des fonctions d'évolution qui sont calculables (mais on verra des contre-exemples). Plus précisément, tout problème de Cauchy (une classe très vaste d'équations différentielles) admet des solutions calculables (s'il a des solutions), dans un des systèmes connus pour la calculabilité sur le continu. Les pathologies, voire les contre-exemples intéressants, existent, on parlera plus bas de celles qui nous regardent de près ; pour l'instant, il suffit de mentionner certaines solutions de l'équation de Poisson dans [16], le bord d'un ensemble de Julia, dans [7].

Mais le problème n'est pas seulement (ni vraiment, au fond) là : le choix de l'échelle, de la méthode perturbative, de l'espace des phases (voire des... variables cachées, ou exclues explicitement ou inconsciemment) montre l'autonomie constituée du langage mathématique, car les mathématiques sont construites dans une friction contingente au monde et s'en détachent ensuite par leur autonomie symbolique.

Bref, quand on écrit un formalisme, on se donne du "calculable" (grosso modo, car les différents systèmes sur le continu ne sont pas encore unifiés). Donc le fait qu'une fonction d'évolution, que l'on *suppose* adéquate à la description (modélisation) d'un système physique (la fonction logistique par exemple (voir [8, 13]), un simple et important système chaotique) soit calculable, est une évidence que l'on déduit de son écriture (un fonction bilinéaire, avec un coefficient k... bon, sauf si on prend k non-calculable... disions-nous). Une variante très connue de la fonction logistique est aussi donnée par une déformation continue mais non-différentiable qui en garde maintes propriétés intéressantes (la fonction "tente", qui, grosso modo, modélise l'action d'étirement et mélange d'une pâte par un boulanger - un peu rigide et répétitif dans son geste). Ces systèmes, comme toute écriture formelle, sont effectifs et n'ont rien d'imprédictible, en soi ! On leur donne des valeurs (calculables), et ils calculent : dans les limites de la machine (finie) à disposition, ils produisent des outputs. Par contre, est imprédictible tout *système physique* que, pour de bonnes raisons, on considère modélisé (formalisé) par une de ces fonctions, y compris leur variantes non-différentiables (un système ago-antagoniste - des oscillations d'action-réaction chimique, par exemple, ou la "transformation du boulanger", dans le cas non-différentiable dont on parlait) : dès que l'on donne le résultat d'une mesure physique, c'est à dire un intervalle, à la fonction en question, cet intervalle est mélangé et élargi exponentiellement, en empêchant bientôt toute prévision. Bien, évidemment, la machine qui calcule ces fonctions non-linéaires peut aussi faire apprécier le chaos :

1 - elle donne des trajectoires (des suites de points) denses dans le domaine de définition ;

2 - une différence (à la 16e décimale, par exemple) dans l'input numérique donne des valeurs très différentes après peu d'itérées (environ 50 dans nos cas logistiques, voir aussi plus bas).

Toutefois, relancée sur les *mêmes valeurs initiales* , dans *le discret* (et c'est fondamental), elle donnera la même trajectoire (suite de nombres).

Voilà l'avantage de la machine à états discrets, dont l'accès à la base de données est *exact* : elle itère, car elle est, tout d'abord, une machine à itérer. Elle est née avec la récursion primitive à la Gödel (qui est itération et +1 dans un registre, voir la note plus haut). Elle permet la portabilité du logiciel, donc son transfert et itération à l'identique (et ça marche - sans portabilité et itérabilité du logiciel, il n'y aurait pas d'informatique).

Or, le passage du processus physique au système formel se fait par le biais de la mesure. Si la seule formalisation/détermination que nous avons, ou que nous considérons pertinente pour un processus donné, est de type mathématiquement chaotique, la mesure physique, qui est toujours et par principe (classique) un intervalle (que l'on décrit, en général, dans le continu), ne permet que de donner un intervalle comme input au calcul. Puisque, disions-nous, les dynamiques non-linéaires sont *mélangeantes* (les extrêmes et les points de maxima et minima de tout intervalle se mélangent à chaque pas) et ont l'"exponential drift" comme dit Turing, cet intervalle de la mesure occupe bientôt et de façon chaotique une grande partie de l'espace et l'on ne peut plus prédire l'évolution du processus physique. Si on donne, comme input, au lieu d'un intervalle, un arrondi, cela ne va pas mieux quant à la prévision, bien évidemment : le résultat du calcul peut n'avoir rien à voir avec l'évolution physique - pour la fonction logistique, avec $k = 4$, un arrondi à la 16-ème décimale, disions-nous, rend imprédictible tout processus physique à partir du 50e itéré environ - cela se calcule par la valeur de l'exposant de Lyapounov, [8].

Pour revenir à la pâte du boulanger, cet exemple très simple et connu, c'est un processus physique déterminé par une fonction d'évolution démontrablement chaotique : il est faux de dire, ce que l'on entend parfois, qu'elle est non-déterministe ; elle est déterministe imprédictible, ce qui est fort différent (l'erreur dans ce cas, est, justement, celui de Laplace, pour lequel la détermination devait impliquer la prédictibilité). Les forces en jeu sont toutes connues, la fonction "tente" en détermine assez bien l'évolution, comme la logistique détermine celle des processus ago-antagonistes ou les neuf équations de Newton-Laplace déterminent l'évolution des trois corps considérés par Poincaré. En physique classique tout est déterministe, même un lancement de dés ! mais, parfois, on n'arrive pas à prédire/calculer les évolutions, à cause de l'approximation de la mesure physique jointe à la sensibilité des systèmes mathématique modélisant (ou à l'excès de variables pertinentes mais cachées du processus : Einstein espérait pouvoir transférer ce même paradigme en physique quantique).

Donc en général, les systèmes mathématiques que l'on écrit sont calculables et prédictibles ; certains de ces systèmes, étant chaotiques, parlent de processus physiques imprédictibles. Par principe, ces derniers, en soi, ne "calculent" pas, dans le sens de Church ou ses versions dans le continu. Précisons ce point.

Le calcul est une histoire de nombres, en fait de (re-)écriture du nombre : le lambda-calcul, les Machines de Turing en sont justement un paradigme. Or, pour associer à un système physique un nombre, il faut passer par la mesure, un grand enjeu de principe en physique, comme on a compris depuis Poincaré et Planck. Si alors, on décide qu'un certain état d'un processus physique est l'input, un autre l'output et on associe à ces états des intervalles de mesure (on ne peut pas faire mieux, classiquement, mais on prend les meilleurs que la mesure physique nous donne) et si tout ce qu'on sait de ce processus est qu'il est mathématiquement imprédictible, alors on ne pourra pas calculer/prédire, en général et après assez de temps (si le temps est le paramètre de contrôle), à partir d'un intervalle input, un intervalle output, *de l'ordre de grandeur de la mesure physique donnée* . Bref, si on lance un bon double pendule physique, on manipule une pâte du boulanger, on ne pourra pas calculer, dans les limites de la mesure, sa position après 5 ou 6 oscillations ou repliements, quoiqu'ils soient déterminés par deux équations ou une fonction d'évolution où tout est calculable. Donc, le double pendule, la pâte étirée, comme machine/processus physique ne calcule pas une fonction calculable.

Mais... définissent-ils une fonction ? Puisque, dans les mêmes conditions (physiques) initiales, ils n'itèrent en général pas, donc ils ne définissent même pas une fonction mathématique d'un argument (lequel ?) à l'intérieur de l'intervalle initial de la mesure, une fonction qui donnerait toujours la même valeur ! Il faut alors les paramétrer sur le temps d'un système de référence fixé : au plus donc ils définissent une fonction de plusieurs variables, dont une est le temps du système de référence choisit. Cela les rend fort peu utiles comme machine pour définir des fonctions non-calculables : on ne peut pas les réutiliser, dans le temps, pour calculer la même fonction, car à chaque instant différent on aurait des valeurs différentes, a priori irrépétables. Et personne ne les achèterait comme machine "non Turing".

Et nous voilà encore confrontés à une autre erreur courante : s'attendre à ce que, si la Thèse de Church physique était fausse, alors le contre-exemple devrait donner un processus qui calcule plus que Turing. Mais non ! Elle est fausse, car un processus physique "sauvage" (diraient les biologistes), en général, ne définit même pas une fonction, c'est à dire une relation univoque, argument/valeur. L'idée qu'un processus puisse être réitéré suggère que l'on puisse repartir d'une même (identique ! comme dans le discret) condition initiale. Et cela, si trivial (aux sens français et anglais d'ailleurs) pour une machine est inatteignable dans la nature, sauf des cas bien rares ou... artificiels, à moins d'étendre les paramètres à une dimension temporelle supplémentaire qui prend en compte le comptage de l'expérience réalisée. Quant au vivant, n'essayez surtout pas de faire décider de l'arrêt d'une Machine de Turing à une paramécie et aux mouvements de ses deux milles cils : bien en amont du calcul, les paramécies ne définissent pas des fonctions par leurs activités (entre la paramécie et le calcul il y a le "mur" de la mesure : comment mesurer, que faut-il mesurer, avec quelle approximation ?).

Fort heureusement, nous avons inventé une machine, pas du tout sauvage, mais bien domestiquée et *exacte*. Elle vient avec son propre système de référence et horloge (dont les problèmes dans les réseaux de machines concurrentes, où l'absolu spatio-temporel fait défaut). Grâce à sa structure de machine à états discrets, souligne Turing dès son invention [5] cette machine permet un accès exact aux données et calculs et ...elle itère, à l'identique, quant on le lui demande : voilà les deux raisons de sa force. Et, même dans les réseaux d'ordinateurs, grâce au discret des bases des données, on arrive à faire itérer les processus, malgré les défis posés par la concurrence et le continu de l'espace-temps physique.

5. Retour sur la calculabilité en mathématique

Mais revenons un peu sur la question de la calculabilté en dehors de la mesure dont il vient d'être question.

5.1. **Le temps long.** Le chaos est un phénomène de temps long : la sensibilité aux conditions initiales existe toujours, c'est son asymptotique à grand temps qui diffère entre chaos et intégrable. Que devient l'évolution du boulanger dans le cas d'un nombre infini d'itérations ? Soyons plus précis et regardons le cas de l'ergodicité, une propriété pourtant faible (et non-caractéristique) du chaos. Un système est ergodique lorsque moyenne temporelle et moyenne spatiale se confondent. C'est une propriété "en mesure", et qui nécessite, dans son versant "temps" une intégration sur un temps infini. On doit se poser la question :

"Est-ce que la quantité $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{-t}^{+t} f\text{o}\Phi^s ds$ est calculable ?"

[5] ou peu après : en 1936 elle n'était qu'une machine logique, "a man in the act of conmputing", seulement après 1948 Turing la verra aussi comme processus physique - à états discrets, justement

La question :

"Est-ce que la quantité $\int_{-t}^{+t} f\text{o}\Phi^s ds$ est calculable *pour tout* t*?*" a une réponse claire en terme de propriétés de calculabilité des équations différentielles ordinaires, mais le passage à la limite $t \to \infty$ nous entraîne vers ces limites dont il a été question plus haut et dont il va être à nouveau question maintenant. En particulier la vitesse de convergence (mathématique) va intervenir dans la réponse à la première question, et obtenir de l'information sur cette vitesse de convergence est un problème très délicat *spécialement en ce qui concerne les flowt réels, pratiques, ceux que nous donne la nature.*

Il ne faut cependant pas oublier l'apport immense de l'informatique : l'ordinateur, pourtant fondamentalement non-chaotique, "voit" très bien le chaos, le suggère, le présente à nos yeux de manière tout à fait spectaculaire et, par là même, de façon parfaitement indispensable de nos jours.

5.2. **Le passage au continu.** Le passage des rationnels aux réels pose plus de problèmes qu'il n'y paraît : un système quantique dans un volume fini est certes représenté par un espace vectoriel de dimension finie (attention d'ailleurs il faut que non seulement l'espace soit borné, mais aussi l'espace des impulsions, c'est à dire l'espace de phases, dont le *mètre étalon* est la constante de Planck). Mais le principe de superposition rend immédiatement infini (à la puissance du continu) le *nombre* d'états : c'est exactement l'aspect "espace vectoriel" de la théorie. La mécanique quantique vit sur des espaces vectoriels et la "finitude" de l'espace entraîne la finitude de la *dimension* de ces espaces, pas de leurs cardinaux. On ne peut mettre, pour une valeur fixée de la constante de Planck, qu'un nombre fini, $d = \frac{V}{\hbar}$, de vecteurs (états) *indépendants* dans un volume fini V, mais grâce au (à cause du) principe de superposition, on en met en fait un nombre infini, autant que de points dans $\mathbb{C}^d$.

Il faut enfin évoquer la Rolls-Royce de la physique mathématique : la théorie des équations aux dérivées partielles. Une EDP peut être vue comme une équation différentielle ordinaire en dimension infinie (c'est d'ailleurs exactement cet aspect que retient l'ordinateur) : chaque point de l'espace "porte" une variable dynamique dont l'évolution dépend des points immédiatement (infinitésimalement même) voisins. Contrairement aux EDO qui, en général, ont une solution à tout temps, on peut dire qu'une EDP a (toujours en général, dans le cas "hyperbolique") une durée de vie limitée, en ce sens que sa solution peut exploser en temps fini. On voit donc surgir deux écueils : un passage à l'infini pour l'espace, et un passage au "fini" pour le temps. Voila un autre exemple où la notion même de calculabilité se superpose mal au phénomène physico-mathématique.

5.3. **Conclusion.** Demandons nous pourquoi le chaos a été inventé. La sensibilité aux conditions initiale est apparue comme résultat négatif, empêchant l'intégrabilité. La négation de l'intégrabilité se veut perceptible à temps fini (puisque l'intégrabilité nous place face à l'éternité). Mais il est très difficile de montrer qu'un système n'est pas intégrable. On a alors recours à des résultats asymptotiques (un peu comme on use et abuse de nos jours des statistiques) qui sont souvent les seuls à être disponibles. D'où l'invention du chaos, autre point extrémal et antipodique aux systèmes intégrables. Et d'où ses limites vis-à-vis de la calculabilité.

6. Non-déterminisme ?

On définit souvent, en informatique, comme "non-déterministes" des relations non fonctionnelles ; bref, quand on associe à un nombre un ensemble. Examinons d'abord le cas des Machines de Turing dites "non-déterministes", dont les functions de transitions ont justement cette nature (valeur-ensemble de valeurs). Les appeler non-déterministes peut être raisonnable, comme a priori et tant qu'on reste dans les formalismes logico-informatiques, mais cela n'a pas de sens physico-mathématique. Y-a-t-il un processus physique sous-jacent qui va associer à un nombre input un (élément de l') ensemble en question ? Pas nécessairement. Alors, si déterministe (classique) veut dire (potentiellement) détermineé par des équations ou des fonctions dévolution, une Machine de Turing "non-déterministe" est bien *déterminée* par une fonction qui associe à une valeur d'input un ensemble output (question de typage asymétrique et rien d'autre). Si choix d'une valeur dans un ensemble il y a, certainement la physique quantique pourrait en proposer un : il est légitime de dire qu'une mesure quantique, en donnant des probabilités parmi des valeurs possibles, fait une telle opération. Peut-on utiliser un processus classique pour la même association ? Pourquoi pas : on prend un double pendule physique, déterminé par deux équations ou la pâte du boulanger, dont l'évolution est décrite par la fonction "tente" - donc rien de plus déterministe que ces deux objets et leurs évolutions. On leur donne un nombre input ; l'évolution démarre sur un intervalle de la mesure grosso modo centré sur ce nombre, mais le résultat, qui est imprédictible après quelques itérés, peut prendre une valeur parmi tous ceux de l'espace. C'est cela l'imprédictibilité déterministe : avec un jeu de langage (et un peu de confusion) on peut dire aussi que cette association (une valeur/un ensemble) donne une relation non fonctionnelle et la considérer comme non-déterministe. Mais la clarté conceptuelle, nécessaire aux bons rapports entre mathématiques et physique, disparaît : tout est gris et ce qui n'est pas fonctionnel (et calculable) est pareil (plus de différence entre détermination imprédictible classique et indétermination quantique, typiquement).

Pour ce qui concerne les systèmes concurrents, la situation est plus intéressante. Au cours d'un processus, qui a lieu dans l'espace-temps physique, des choix sont fait parmi des valeurs possibles, suite à l'intéraction avec d'autres processus. Dans les machines concrètes, ces choix peuvent dépendre de phénomènes classiques, relativistes ou quantiques, voire des humaines qui interviennent dans un réseaux. Dans les deux premiers cas, tout est déterministe, quoique décrit par des relations non-univoques et bien qu'il puisse y avoir de l'imprédictibilité classique (quelle valeur dans l'ensemble déterminé ? un moindre décalage temporel peut produire des choix différents) ; dans les autres deux cas (quantique et "humain"), le choix d'une valeur sera intrinsiquement non-déterministe, mais, en principe, pour des raisons différentes (ne sachant pas donner un nom physique approprié à la volonté des hommes se panchant sur un réseaux).

Il faudrait mieux introduire une notion d'"indétermination" propre à l'informatique correspondant à l'absence d'univocité de la relation input-output *avec choix*, en particulier celle que l'on retrouve dans le "multitasking", dans la concurrence des processus en réseaux etc..

6.1. **Le discret et le "mythe" du continu.** On retrouve cette perte sens de la physique du continu chez Gandy par exemple (un des pionniers de la Thèse de Church physique, [11]). Il suppose entr'autre un monde physique à information finie, car dans un univers fini. Alors on le discrétise, tout en restant dans un cadre classique et voilà que le chaos déterministe disparaît, comme dans la Machine de Turing (ce que Turing dit très clairement en '50 !) (voir aussi la discussion sur la finitude en mécanique quantique au paragraphe précédent).

Tout d'abord, les définitions mathématiques du chaos utilisent le continu (pour représenter l'intervalle de la mesure) ; elles perdent leur sens quand la topologie naturelle de l'espace que l'on considère est la topologie discrète (on y reviens, car c'est important : l'accès à la mesure du processus devient alors exacte, car on accède, mathématiquement, à des points isolés - une autre façon pour résumer tout ce que l'on vient de dire).

Or, Gandy ne paraît pas avoir suivi son maître Turing, l'inventeur de la "Machine à états discrets" (théoriquement prédictible, dit ce dernier, [22]), dans l'aventure du continu des dynamiques non-linéaires (théoriquement imprédictibles, souligne Turing, leur propriété la plus intéressante, [23]). En fait, Turing avait bien compris cet enjeu dans les dernières années de sa vie, en contribuant de façon remarquable au développement de ceux qu'il appelle les "systèmes continus" (le nom qu'il donne aux modèles non-linéaires de la morphogenèse, [23], et qu'il utilise déjà dans [22] en contraposition à sa machine). En fait, le continu est le meilleur outil que l'on ait pour parler, pour le moment, de la détermination classique. C'est le "mythe" d'un espace sous-jacent ou abstrait, un continu mathématique, qui nous fait croire que toute trajectoire classique est déterministe : elle est "filiforme" (sans épaisseur) et part d'un point d'Euclide-Cantor (sans dimension, disait Euclide). Il s'agit d'un "mythe" dans le sens de la mythologie grecque, car constructeur de connaissance, mais hors du monde. Cette limite, le point, la ligne sans épaisseur d'Euclide ne sont pas donnés par la mesure, notre seul accès au monde physique. Le mythe est à la limite, comme l'intégrale thermodynamique qui nous donne l'irréversibilité de la diffusion à la limite (c'est-à-dire, qui démontre le deuxième principe, en supposant une infinité de trajectoires pour les molécules d'un gaz dans un volume grand, mais fini). La limite mythique (conceptuelle, si le lecteur préfère) nous fait comprendre : quelle audace ce début de science, cette imagination de la ligne sans épaisseur, du point sans dimension, comme dit Euclide, et sans lesquels il ne pourrait pas pu y avoir une *théorie* de la mesure des surfaces (car il faut bien avoir des bords "sans épaisseur", donc des points sans dimension aux intersections). Le fini, discret de la perception naïve et pré-scientifique, pré-grecque, rend aussi bête qu'une machine.

Dans ce contexte et depuis Einstein, on est allé plus loin et on est même arrivé à dire que fini, pour l'univers, ne veut pas dire limité. Pensez au modèle relativiste de la sphère de Riemann : il est fini mais illimité, contrairement à la notion de fini chez Euclide, qui équivaut à limité (infini = a-peiron = sans limites). Pourquoi l'information sur la sphère de Riemann y serait "finie" ? de quel fini parlons-nous ? d'Euclide ou du fini illimité moderne ? Relativiste ou quantique, le "fini" contient l'infini.

Sauf des grands comme Turing, les logiciens et informaticiens ont souvent une culture du fini/discret/laplacien, comme dit Turing de sa machine, dont il est difficile de sortir. Son origine est le regard arithmétisant de Frege sur le "délire" de la géométrie riemannienne et l'incompréhension d'Hilbert, un grand de la physique mathématique, pour l'imprédictibilité, voire l'indécidabilité à la Poincaré (on ne peut pas calculer la position de trois planètes après un temps suffisamment long), quand il parle de métamathématique : il relancera, 20 ans après, une conjecture de décidabilité après l'autre, toutes fausses (Arithmétique, Choix, Hypothèse du Continu), malgré les hurlements, fort motivés, de Poincaré (M. Hilbert pense que les mathématiques sont une machine à saucisses !). Poincaré avait déjá fait l'expérience de l'indécidable, en tant qu'imprédictible. Toutefois, cette culture de la détermination prédictible et intégrable, dans un univers - base de données discret, fini et limité, nous a donné des machines laplaciennes formidables. Faisons juste un effort pour mieux les corréler au monde, aujourd'hui. Une bonne pratique, et théorie, de la modélisation et les réseaux, la concurrence l'imposent : ils évoluent dans un espace-temps que l'on comprend mieux, pour l'instant, par le continu. Fort heureusement, aussi les systèmes hybrides et la calculabilité sur le continu proposent aussi des regards fort différents. De même, le travail de Girard qui essaye d'enrichir la logique avec des concepts au cœur du physico-mathématique : les symétries, les algèbres d'opérateurs, la commutativité quantique.

Mais revenons justement au cas quantique.

7. Le cas de la mécanique quantique

Le cas quantique peut à première vue présenter une symbiose parfaite entre les deux sections précédentes : on a affaire à une équation fondamentalement fondamentale, l'équation de Schrödinger, qui ne dérive de rien, qui doit être au cœur de tout processus fondamental, et dont la mathématisation est parfaite, ne dépendant que d'un paramètre (au fait, la constante de Planck est-elle calculable ?). De plus la "mesure" prend une toute autre dimension, l'intervalle, au fond, n'existe plus et l'aléatoire intrinsèque fait son entrée.

Mentionnons tout de suite ici-même l'importance qu'a eue, spécialement en physique des particules élémentaires, le rôle des ordinateurs. Le calcul de valeurs numériques précises, par exemple le calcul du moment magnétique de l'électron, et leur accord, littéralement "phénoménal", avec l'expérience, a sans aucun doute eu une importance cruciale pour le développement de la théorie. Et cela précisément dans le domaine même où les ordinateurs sont devenus irremplaçables : le calcul numérique. Associer un nombre à des centaines, des milliers, de diagrammes de Feynman est une opération surhumaine que réalise avec bravoure l'informatique.

7.1. **Précision quantique.** Les résultats que procure la physique quantique sont précis, d'une précision qu'aucune théorie physique n'a jusqu'alors procurée. Ils sont aussi discrets, c'est à dire que l'on a perdu la richesse du continuum, et que l'on est face à un jeu (discret) des possibles. Bien sûr ce que l'on mesure vraiment, c'est un objet classique, une trace classique (chambre à bulles, plaque photographique...) d'une valeur quantique. On est bien là au cœur du problème : une mesure quantique fournit des valeurs appartenant à un ensemble discret (ensemble des valeurs propres du hamiltonien), d'où une certaine rigidité source de stabilité et donc de précision (celles de la topologie discrète). Vu sous cet angle, la "précision" quantique semble en quelque sorte tautologique ; on ne se donne pas de place autour des valeurs discrètes pour s'étendre dans la volupté de l'imprécision. On pourrait même se dire : donnons-nous une fois pour toutes les valeurs propres de tous les hamiltoniens du monde et nous aurons un champ de “outputs” discret par essence.

Mais c’est justement oublier que le résultat de cette mesure est recueilli sur un objet classique, puisque accessible à nous. Les raies spectrales apparaissent sur des plaques photographiques. Et donc on retrouve a posteriori le continu du classique, et ses vertus malfaisantes car sujettes, a priori, à créer de l’imprécision. Et justement, dire que la mécanique quantique est incroyablement précise, cela veut dire exactement qu’elle fournit, lors de l’expérience, des traces *classiques* d’une extrême précision, exhibant dans continu une structure discrète.

Et cela n’est plus du tout tautologique.

7.2. **Aléatoire.** Comme pendant de cette discrétion, et donc de cette précision, la mécanique quantique a décidé de donner un peu de fil à retordre en donnant au résultat de la mesure un caractère aléatoire. Signalons tout de suite qu’il fallait bien que quelque chose se passât, puisque le principe de superposition quantique nous interdit l’accès direct, hors mesure, à la situation quantique (on ne “voit” pas d’états superposés, ou intriqués, plus exactement dès qu’on les “regarde”, et il faut les regarder pour les voir, ils se “désuperposent’, se désintriquent). Ce passage par le hasard échappe tout de suite à tout système de calcul de . . .calculabilité. Plus de déterminisme, plus d’équation. Bien sûr on peut parler de statistiques, et se demander si ces statistiques sont calculables. On revient alors aux algorithmes non-déterministes de la section précédente, mais on a changé le problème.

7.3. **Les algorithmes quantiques.** Les algorithmes quantiques en sont une parfaite illustration. Rappelons qu’un algorithme quantique consiste en un système quantique évoluant à partir d’une donnée initiale contenant, disons, un “input” classique. Par le principe de superposition, l’intrication, à la fin de l’évolution, a fait son œuvre et l’état final est typiquement quantique, superposé en plusieurs états, dont un seul contient l“output” recherché. Pour l’obtenir on effectue alors une mesure, censée, par construction, donner le bon résultat avec une probabilité maximale.

Qu’y-a-t-il de Turing calculable dans tout cela ?

On peut se poser la question pour la première partie, celle de l’évolution quantique “équationelle”, et modulo les remarques de la fin de la section 5.2 (l’équation de Schrödinger est une EDP après tout, mais pas hyperbolique), on pourrait peut-être répondre “oui”. Mais la dernière phase, celle de la mesure, échappe encore une fois à la réduction calculatoire : *l’aspect aléatoire de la mesure ne permettra jamais à un ordinateur quantique de décoder, au moment voulu et à coup sûr, une carte de crédit, nous voilà rassurés.*

7.4. **Algorithmes quantiques versus algorithmes non-déterministes.** Peut-être convient-il de préciser l'importante différence entre algorithmes quantique et non-déterministe, source, nous semble-t-il, de bien des confusions. On pourrait en effet confondre deux aspects "parallèles" fort différents.

Un algorithme quantique fonctionne bien, en quelque sorte, en parrallèle ; le calcul est fondamentalement vectoriel, à cause de la nature même de la dynamique quantique. Mais le résultat final, celui qu'il faut extraire de l'état final quantique, lui, est une et une seule des composantes présentes dans ce dernier. Les autres composantes, le vecteur "état final" en entier, n'a aucun intérêt en soi : tout d'abord parce qu'il est inaccessible, ensuite parce que les autres composantes (que celle qui contient le résultat) ne portent aucune information reliée au problème initial. Il ne s'agit donc pas de disperser l'information afin de morceler le (et par là même augmenter la puissance du) calcul, dont on "recollera" les morceaux si l'on peut dire, mais bien de se placer dans un espace (quantique et rappelons-le non encore réalisé expérimentalement de façon satisfaisante) dont il faut brutalement revenir pour finir le calcul.

Car l'essentiel est bien là : le "calcul", le "process", n'est terminé *qu'une fois la mesure ultime effectuée.* C'est ce processus total qu'il faut placer au regard de la calculabilité, et non la partie purement quantique, porteuse d'aucune information.

C'est exactement la même idée qui fait qu'il n'y a pas de "paradoxe EPR", puisque, bien que l'on agisse à distance sur le vecteur intriqué, on ne transmet aucune information.

7.5. **Conclusion.** L'aléatoire de la mécanique quantique est intrinsèque, échappe au calcul. Mais voyons de plus près.

8. L'aléatoire, entre imprédictibilité et chaos.

Dans [5], on propose, en physique mathématique, d'identifier l'aléatoire classique avec l'imprédictible. L'aléatoire se présenterait, disions-nous, à l'interface entre mathématiques (voire, plus généralement, langages) et processus physiques. Il ne faut toutefois pas ignorer que, dans des cadres probabilistes, purement mathématiques (théorie de la mesure), on peut aussi parler d'aléatoire. Per Martin-Löf, par exemple, a donné, il y a 40 ans, une notion purement mathématique d'aléatoire et qui se base sur la calculabilité. Plus précisément, on peut, par la calculabilité, dire quand une *suite infinie d'entiers* (de 0 et de 1 par exemple) est aléatoire, sans référence à un éventuel processus physique d'engendrement. Bref, une suite est aléatoire à la Martin-Löf si elle est "fortement" non-calculable, une définition qui demande un peu de travail (voir [19] pour un survol récent). Dans un sens, la calculabilité/prédictibilité formelle sait nous dire quand on sort de son domaine : un peu comme Gödel, sans jamais sortir, dans ses preuves, du formel, a su nous donner une formule qui échappe au formel.

De plus, ce qui nous intéresse ici, cet aléatoire purement mathématique est "à l'infini", exactement comme celui des dynamiques classiques chaotiques est asymptotique : une suite Martin-Löf aléatoire est infinie (les segments initiaux sont au plus incompressibles).

Que dire alors du rapport entre cette notion, purement mathématique, et la physique ? Du point de vue statistique, la préoccupation de Martin-Löf (ML) à l'époque, tout va bien : la distribution de probabilité d'une suite ML-aléatoire, pour une bonne mesure de probabilité, est celle d'un lancement d'une pièce de monnaie, à l'infini. Mais le rapport au physico-mathématique des systèmes dynamiques ? Comment passer directement, par voie mathématique, sans référence aux processus physiques que les deux approches modélisent, du ML-aléatoire au déterminisme chaotique (des systèmes d'équations ou des fonctions d'évolution) ? On entrevoit des corrélations possibles dans des travaux en cours (en particulier dans l'équipe CIM d'un des auteurs) : on analyse les points et les trajectoires dans des systèmes chaotiques en termes de ML-aléatoire, tout en passant par des bonnes notions de mesure et d'entropie mathématique (voir [14]). Dans le deux cas, suites d'entiers et dynamiques continues, on travaille à l'infini.

9. Conclusions générales

Voyons un instant où nous en sommes. Nous avons passé en revue certains aspects du calcul en physique et en mathématiques. Nous avons vu que bien des situations en physique, même classique, font intervenir des processus "hors calcul" au sens de "calcul résolvant des équations". Nous avons aussi mentionné l'apport calculatoire de l'informatique et son rôle essentiel. Or, n'oublions pas l'importance en soi de la pluralité des "visions" dans la compréhension des sciences de la nature, pluralité qui a toujours existé en sciences. Le nouveau regard proposé par le discret, en grande partie dû à l'apport de l'informatique, est une richesse conceptuelle et technique, qui s'ajoute au continu différentiable physico-mathématique, de Newton à Schrödinger (voire par exemple son importance en biologie végétale, pour mentionner une autre discipline, [24]). En revanche, la réduction à une dimension conceptuelle et mathématique par trop "computationnelle" (dans un sens trop naïf du mot) ramènerait, selon nous, à une platitude stérile, dont seraient même absentes les "nuances" du continu post-laplacien. Enfin, dans le cadre, en particulier, du jeu continu/discret, nous avons, à l'intérieur de l'activité "équationelle", discuté des notions apparaîssant comme fondamentales dans la science moderne, comme celles de déterminisme, de prédictibilité, d'où émerge naturellement la notion d'aléas. Mais voyons de plus près.

Comme il est synthétisé dans [5], l'aléatoire physique classique est de nature "épistémique", tandis que celui de la mesure quantique est intrinsèque ou "objectif" : une distinction qui devrait être seulement un instrument de clarté, conceptuelle si possible, et rien de plus. Par cela on fait référence à plusieurs aspects dont celui qui nous intéresse est le suivant : l'aléatoire classique peut être analysé par des méthodes différentes. Bref, on peut traiter les dés, le double pendule, la pâte du boulanger etc... en termes de suites statistiquement aléatoires et de distributions de probabilité (théorème de la limite centrale etc.), mais aussi par les mathématiques du déterminisme chaotique (si on a le courage d'écrire les maintes équations qu'il faudrait pour le mouvement des dés, c'est facile pour le double pendule, la pâte du boulanger). Certains, surtout en informatique on l'a vu, disent que les dés ou la pâte du boulanger (voire les trois corps ?) sont non-déterministes car, en utilisant l'approximation de la mesure, on peut associer à un nombre input exact plusieurs outputs numériques. Il s'agit d'un abus de langage qui ignore les spécifications apportées par l'élargissement du champ de la détermination par Poincaré, qui inclut l'aléatoire classique dans le domaine de la détermination chaotique (le non-linéaire des "systèmes continus", dit le grand Turing), et par l'indétermination de la physique quantique. Cela est propre à cette culture du discret, formidable pour nos machines à états discrets, mais qui passe à côté de 120 ans de géométrisation de la physique (géométrie des systèmes dynamiques et relativistes) et de l'appréciation du rôle de la mesure (classique/quantique).

Nous voyons donc apparaître trois idéalisations grâce auxquelles nous pourrions penser pouvoir découvrir et comprendre le monde (classique).

1. l'idéal digital, discret, qui nous montre(rait) la nature comme *calculant*, et uniquement calculant. Calculant, itérant, réitérant à l'infini avec une précision merveilleuse, et trompeuse.

2. l'idéal du continu mathématique, dans lequel la nature (les mathématiques) *résout* des équations. En elle-même cette vision est parfaitement déterministe, les équations ont des solutions.

3. l'idéal de l'équation, pour lequel la nature se *divise* en échelles différentes, impénétrables les unes aux autres.

Ces idéaux (1 2 3) sont placées en ordre antichronologique : historiquement les équations sont arrivées les premières, puis leurs modèles mathématiques, enfin leur simulation numérique.

Voyons pour finir les connexions et anti-connexions des ces trois visions du monde, de ces trois étages que l'on pourrait comparer aux trois sous-sols de Girard. Ce sera là le résultat de ce travail.

A première vue on remonterait facilement du 3 au 2 puis au 1. Le continu mathématique semble parfait pour les équations, et l'approximation digitale est devenue tellement habituelle que l'on doit presque se cacher pour la critiquer. Mais l'ascenseur fonctionne mal : du 3 au 2 Poincaré bouscule les choses (la sensibilité aux conditions initiales, au fond, rend difficile l'idée pratique de la trajectoire dans le continu), et du 2 au 1 on a perdu, en retombant à l'étage discret, quelques saveurs chères au continu (les fluctuations en dessous de la discrétisation, ainsi que la ... discrète noirceur du lait). Si l'on prend l'escalier pour descendre on a le vertige : manque d'équivalence computationnelle pour la passage au continu, et perte de fiabilité lorsque l'on introduit l'intervalle de l'imprécision de la mesure en passant du 2 au 3...

Et puis il y a la mécanique quantique et son aléatoire intrinsèque. L'idéal 3 vole en éclat lors du phénomène de la mesure : plus d'équation. Bien sûr la physique peut se passer de phénomènes *individuels* de mesure : on n'observe pas (encore) expérimentalement de réductions de paquet d'onde lors d'évènements uniques, on n'observe que des moyennes, des statistiques. Mais la physique récente pousse vers l'étude et l'observation de systèmes physiques quantiques simples qui réalisent de mieux en mieux les "gedenken Experiment"[6] des pères fondateurs [18], et de toutes façons la réduction du paquet d'onde lors de la mesure est, croyons-nous, une pierre nécessaire au formalisme quantique, un axiome qui rend cohérent ce dernier.

Cette situation n'est pas nouvelle en physique : on n'observe pas la mécanique newtonienne dans une mole de gaz. Pourtant grâce à elle on reconstruit la dynamique des gaz et la thermodynamique, fruits d'un passage à l'infini à partir d'un modèle fini non observable.

Remerciements

Nous tenons à remercier Eugène Asarin, Olivier Bournez, Mathieu Hoyrup et Cristobal Rojas pour une lecture critique du manuscript.

Références

[1] Aceto L., et al. (eds.) **The difference between Sequential and Concurrent Computations**. Special issue, **Math. Struct. in Computer Science**, Cambridge U. Press, n. 4-5, 2003.

[2] Arnol'd V.I., **Equation différentielles ordinaires**. MIR, 1976.

[3] Bournez O.. **Modèles continus. Calculs**. Habilitation DR, LORIA, Nancy, 2006.

[4] Bush V., "The differential analyzer". Journal of the Franklin Institute, 212, 1931.

[6] paradoxe EPR, chat de Schrödinger par exemple

[5] Bailly F., Longo G., **Mathématiques et sciences de la nature. La singularité physique du vivant**, Hermann, Paris, 2006

[6] L. Blum, F. Cucker, M. Shub, S. Smale. **Complexity and Real Computation**. Springer, 1998.

[7] Baverman M., Yampolski M. “Non-computable Julia sets”. preprint, 2005 (http ://www.math.toronto.edu/yampol/).

[8] Devaney R. L. **An Introduction to chaotic dynamical systems**, Addison-Wesley, 1989.

[9] Dowek G. “La forme physique de la thèse de Church et la sensibilité aux conditions initiales”, ce volume.

[10] Feynman R., **Quantum mechanics and path integrals**. McGrawth-Hill, 1965.

[11] Gandy R., “Church’s Thesis and the principles for Mechanisms” in (Barwise et al. eds) **The Kleene Symposium**, North Holland, 1980.

[12] Hainry E., **Modèles de caculs sur les réels**. Thèse, LORIA, Nancy, 2006

[13] Hoyrup M., Kolcak A., Longo G. “Computability and the Morphological Complexity of some dynamics on Continuous Domains”. Invited survey **Theor. Comp. Sci.**, to appear, 2007.

[14] Galatolo S., Hoyrup M., Rojas C. “Computable dynamical systems, SRB measures, random and pseudo-random points”, in preparation.

[15] Moore C. **Recursion theory on reals and continuous-time computation**. Theoretical Computer Science, 162, 1996.

[16] Pour-El M.B., Richards J.I., **Computability in analysis and physics**. Perspectives in mathematical logic, Springer, Berlin, 1989.

[17] Paul T. “On the status of perturbation theory”, **Math, Struct. in Computer Science**, **17**, 2, p. 277-288, (2007).

[18] voir l’exposé de J-M. Raimond au colloque ”Qu’est-ce qui est réel ?” (organisateurs C.Debru, G. Longo, T. Paul et G. Vivance). École Normale Supérieure, 2005, http ://www.diffusion.ens.fr/index.php ?res=conf&idconf=807.

[19] Rojas C. “Computability and Information in models of Randomness and Chaos”, **Math. Struct. in Computer Science**, to appear 2008.

[20] Shannon C., “Mathematical theory of the differential analyzer”. In **J. Math. Phys.**. vol. 20, 337–354, 1941.

[21] Turing A.M., “Intelligent Machinery”. National Physical Laboratory Report, 1948. In Meltzer, B., Michie, D. (eds) 1969. **Machine Intelligence 5**. Edinburgh University Press.

[22] Turing A.M., “Computing Machines and Intelligence”, **Mind**, vol. LIX, nââ236, p. 433-460, 1950.

[23] Turing A.M., “The Chemical Basis of Morphogenesis”, **Philo. Trans. Royal Soc.**, vol. B237, p. 37-72, 1952.

[24] Varenne F., **Du modèle à la simulation informatique**. Vrin, Paris, 2007.

[25] Weihrauch K., **Computable Analysis**. Texts in Theoretical Computer Science. Springer, Berlin, 2000.

CNRS, Département d'Informatique UMR 8548
E-mail address: `longo@ di.ens.fr`

CNRS, Département de Mathématiques et Applications UMR 8553
E-mail address: `paul@ dma.ens.fr`

Ecole Normale Supérieure, 45, rue d'Ulm - F 75730 Paris cedex 05